SocioBrains

SocioBrains

ISSN 2367-5721 (online), JOURNAL HOMEPAGE: WWW.SOCIOBRAINS.COM
Publisher: SMART IDEAS – WISE DECISIONS, Ltd., Sofia, Bulgaria

ISSUE 73, SEPTEMBER 2020

VALUE EVALUATION OF THE CRITERIA BY THE METHOD OF "PROMETE" WHEN MAKING MANAGEMENT DECISIONS

Abstract: A large number of decision-making tasks are formalized in terms of multi-criteria decision-making and systems. By helping to solve them, the multi-criteria method of decision-making is gaining more and more popularity.
The methods by which the global preferences of the decision-maker are summarized as a result of the synthesis of one or more generalized preferences (relationships) of preferences between alternatives are the so-called anticipatory methods, including the PROMETHEE method (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations). They use the assumption of limited comparability between alternatives. They initially construct one (or several) relation (s) that reflect the global preferences of the decision maker. This relation is then used to assist the decision maker in solving the multicriteria analysis decision task.

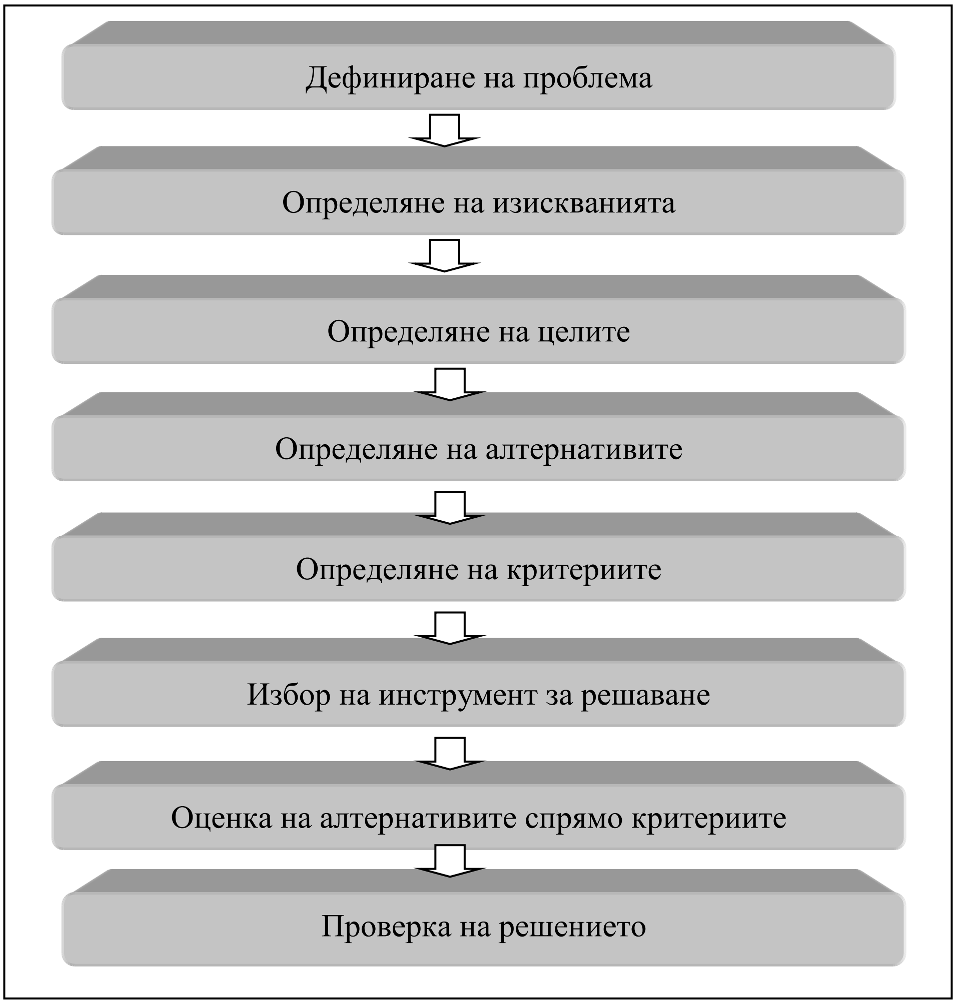
Author information:

Mariyan Rahnev
eng.
Bulgaria

Keywords:
PROMETHEE method; preference information; multi-criteria decision making; linear programming; determination of weights

Мениджмънтът е процес, при който предварително определени цели се постигат чрез използване на известни ресурси, които се разглеждат като входни параметри, а целите - като изходни параметри на процеса на управление. Степента на успеха от работата на мениджърите се измерва с различни критерии. Най-често един такъв критерий е отношението между входните и изходните параметри на процеса на управление. Успехът на процеса на управление зависи от изпълнението на известни управленски функции като планиране, организиране, направляване и контролиране. За изпълнението на тези функции мениджърите са ангажирани в един непрекъснат процес на вземане на решения. В този смисъл, мениджърът може да се отъждестви с лице, вземащо решение (ЛВР).

Един възможен подход за анализиране на процеса на вземане на решение е разглеждането му като многоетапен процес - някои от етапите включват оптимизация на време и ресурси. Обобщение на етапите на този процес са показани на фиг.1.



Фиг.1. Диаграма на процеса на вземане на решение

• *Дефиниране на проблема* – идентифицират се основните причини, ограничаващите предположения, системата и организационните граници, както и всички заинтересовани страни.

• *Определяне на изискванията* – определят се условията, които всяко приемливо решение на проблема трябва да удовлетворява.

• *Определяне на целите* – общи декларации за намерения и желани стойности.

• *Определяне на алтернативите* – алтернативите предлагат различни подходи за промяна на първоначалното състояние в желаното състояние на процеса. Независимо дали те са съществуващи или са въображаеми, всяка алтернатива трябва да отговарят на определени изисквания.

• *Определяне на критериите* – чрез критериите се прави разлика между алтернативите, като критериите трябва да се основават на целите. Необходимо е да се определят критерии, които са обективни мерки на целите, за да се измери как всяка алтернатива постига целите.

• *Избор на инструмент за вземане на решение* – изборът на подходящ инструмент не е лесна задача и зависи от спецификата на конкретния проблем, както и от целите на ЛВР. Понякога, колкото по-прост е начина, толкова по-добре, но сложните проблеми изискват и сложни методи, използващи например индексни матрици и интуиционистки размити множества.

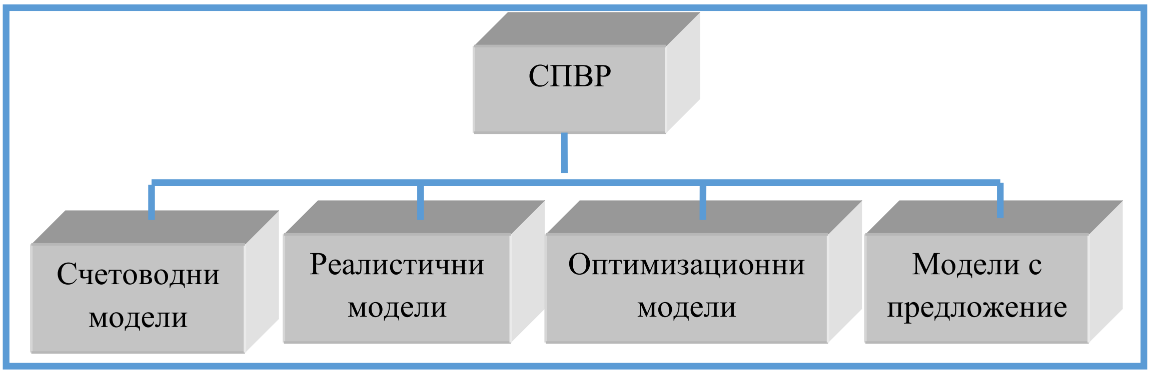
• *Оценка на алтернативите спрямо критериите* – в зависимост от критерия, оценката може да бъде обективна (фактическа) чрез отношение към някои общоприети и разбираеми измервания или може да бъде субективна, отразяваща субективната преценка на оценителя.

• *Проверка на решението* – избраните чрез използване на приетите средства за вземане на решения алтернативи, винаги трябва да бъдат проверени спрямо изискванията и целите на проблема. Може да е налице неправилно прилагане на инструмента за вземане на решение. При сложните проблеми, избраните алтернативи също могат да бъдат обект на вниманието на ЛВР по отношение на необходимост от допълнителни цели или изисквания, които да се добавят към модела на вземане на решение.

Важна част при вземането на решения са системите за подпомагане вземането на решения (СПВР). Те представляват клас на компютърно-базирани информационни системи, включително и системи базирани на знания, които подпомагат процеса на вземане на решения. Правилно проектираните СПВР представляват интерактивна софтуерна система предназначена да улеснява работата на ЛВР да събира полезна информация от данни, документи, лични знания, и/или модели за идентифициране и решаване на проблеми и вземането на решения.

В сферата на СПВР няма универсално приет модел и съществуват много конкуриращи се теории в тази област. Поради това съществуват много начини за тяхното класифициране.

Голяма част от СПВР са разработени като инструменти за генериране на решения и оценка на алтернативи, чрез анализ от типа “*какво-ако*” и “*търсене на цел*”, показани във фиг.2.



Фиг.2. СПВР за генериране на решения и оценка на алтернативи, чрез “какво-ако” и “търсене на цел” анализи

Счетоводните модели улесняват планирането чрез изчисляване на последователността от планирани действия, за да се оценят приходите, балансите и други финансови отчети. *Реалистичните модели* оценяват бъдещи последствия от действията, въз основа на частично дефинирани модели, включително всички симулационни модели. *Оптимизационните модели* генерират оптимални решения. *Моделите с предложение* водят до конкретно предложение за решение на добре структурирани задачи.

Съществена роля в СПВР имат оптимизационните модели. Необходимо е да се отбележи, че общи методи за построяването на оптимизационните модели не съществуват. Във всеки конкретен случай се изгражда модел, изхождайки от спецификата на проблема. Оптимизационните модели намират голямо приложение поради факта, че те предлагат като крайно решение най-доброто решение, съгласно дефинирания модел. На базата на построения оптимизационен модел могат да се формулират съответни оптимизационни задачи, чиито решение е търсеното оптимално решение. За решаването на оптимизационните задачи съществуват различни подходи, които могат да бъдат използвани в зависимост от формулировката на задачата (едно- или многокритериални задачи). Правилно формулираните оптимизационни модели ще доведат и до правилно решение на разглеждания проблем.

Задачи на многокритериалния анализ

Задачите на многокритериалния анализ са задачи за вземане на решения при наличието на много критерии, когато броят на алтернативите е неограничен, но множеството на алтернативите е определено от краен брой ограничения. Основната им характеристика е, че при тях се оптимизират едновременно повече от един противоречиви и несъизмерими критерия (целеви функции) върху някаква непразна допустима област на изменение на променливите.

При тези задачи в общия случай се оказва, че поради противоречивост на критериите или целевите функции е невъзможно да се намери едно решение, което би било оптимално за всички критерии едновременно, т.е. задачите на многокритериалната оптимизация принадлежат към класа на т. нар. зле дефинирани математически задачи. Оказва се обаче, че съществуват множество от допустими стойности на критериите (респективно, множество от допустими стойности на променливите), за които е изпълнено следното важно условие: не е възможно подобряването на допустимите стойности на някой критерий без да се влоши допустимата стойност на друг – това е т. нар. множество на Парето. Вместо концепцията за оптималност, която се използва при еднокритериалната оптимизация, при многокритериалната говорим за концепция за оптималност по Парето. На основата на такава концепция обаче се достига не до единствено решение, а до множество от оптимални (крайни) решения, които от математическа гледна точка са равностойни, т.е. те са еднакво добри да бъдат оптимално решение на задачата на многокритериалната оптимизация. Но за практиката е необходимо да бъде избрано само едно крайно решение на задачата. Критериите и ограниченията на многокритериалната задача не съдържат информация за определянето на едно решение. Тази информация трябва да бъде зададена допълнително от ЛВР.

Общата формулировка на задачата на многокритериалната оптимизация има следния вид:

$$\text{„max”}\{f_k(x), k \in K\} \qquad (1)$$

при ограниченията:

$$g_i(x) \leq \ b_i, i \in M \qquad (2)$$

$$0 \leq \ x_i \leq d_j, j \in M \qquad (3)$$

където:

- символът “max” означава, че трябва да се намери максимума на всички критерии (целеви функции) едновременно;

- $K = \{1, 2,..., p\}$, $M = \{1, 2,..., m\}$ и $N = \{1, 2,..., n\}$ са индексните множества на критериите, на ограниченията и на променливите;

- $x = \left(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\right)^T$ е векторът на променливите;

- $f_k(x), k \in K$ са критериите;

- $f_x = \left(f_1(x), \dots, f_p(x)\right)^T$ или $z = (z_1, \dots z_n)^T$ е векторът на критериите, $z_k = \ f_k(x), k \in K$;

- $g_i(x), i \in M$ са функциите на ограниченията на задачата.

Критериите $f_k(x), k \in K$ и функциите на ограниченията $g_i(x), i \in M$ са реални функции: $f_k\colon R^n \to R,\ k \in K$ и $g_i\colon R^n \to R,\ i \in K$, където R е множеството на реалните числа.

Ограниченията (2) и (3) определят допустимото множество на променливите $X \subset R^n$.

С $f_x = Z$ се означава образът на множеството X в критериалното пространство $R^p, Z \subset R^p$. Z се нарича допустимо множество в критериалното пространство. Алтернативен запис на задачата на многокритериалната оптимизация е следният:

$$„\max\text{"}\{f_k(x), k \in K\},\ \ x \in X \qquad (4)$$

В зависимост от вида на функциите $f_k(x), k \in K$ и $g_i(x), i \in M$ по отношение на променливите $x_i, i \in N$, както и от вида на тези променливи, се различават следните видове задачи на многокритериалната оптимизация: линейни и нелинейни, непрекъснати и дискретни (наричани още задачи на многокритериалния анализ), детерминирани и стохастични, мрежови и немрежови.

Теоретична обосновка на метод PROMETHEE

PROMETHEE I (частично класиране) и PROMETHEE II (пълно класиране) са разработени от *J. P. Brans* и представени за първи път през 1982 г. на конференция в Университета Лавал, Квебек, Канада.

Няколко години по-късно *J. P. Brans* и *B. Mareschal* разработват PROMETHEE III (класиране въз основа на интервали) и PROMETHEE IV (непрекъснат случай). Същите автори предлагат през 1988 г. визуалния интерактивен модул GAIA, който предоставя графично изображение подкрепящо методологията PROMETHEE.

През 1992 и 1994 г., *J. P. Brans* и *B. Mareschal* предлагат още две разширения: PROMETHEE V (MCDA, включително ограничения за сегментиране) и PROMETHEE VI (представителство на човешкия мозък).

Значителен брой успешни приложения са обработени по методологията PROMETHEE в различни области.

Разгледан е следния многокритериален проблем:

$$max\,\{g_1(a), g_2(a), \dots, g_j(a), \dots, g_k(a) | a \in A\} \qquad (5)$$

където A е ограничен набор от възможни алтернативи $\{a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_n\}$ и $\{g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_j(\cdot), \dots, g_k(\cdot)\}$ е набор от критерии за оценка. Някой критерии може да да бъдат сведени за максимални, а другите да бъдат сведени до минимум. Очакването на вземащия решение е да идентифицира алтернатива, оптимизираща всички критерии.

Обикновено това е зле поставен математически проблем, тъй като няма алтернатива за оптимизиране на всички критерии едновременно. В повечето случаи технологичните, икономическите, екологичните и социалните критерии винаги трябва да се вземат предвид.

Основните данни за многокритериален проблем (5) се състоят от таблица за оценка (таблица 1).

Таблица 1

Таблица за оценка

a	$g_1(.)$	$g_2(.)$	…	$g_j(.)$	…	$g_k(.)$
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	…	$g_j(a_1)$	…	$g_k(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	…	$g_j(a_2)$	…	$g_k(a_2)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	…	$g_j(a_i)$	…	$g_k(a_i)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$		$g_j(a_n)$		$g_k(a_n)$

Решаването на многокритериален проблем зависи не само от основните данни включени в таблицата за оценка но и от ЛВР. Следователно е необходима допълнителна информация представляваща тези предпочитания за да предостави на ЛВР полезна помощ за вземане на решения.

Естественото отношение на доминиране свързано с многокритериален проблем от тип (5) е дефиниран както следва:

За всеки $(a, b) \in A$:

$$\begin{cases} \forall_j:\ g_j(a) \geq g_j(b) \\ \exists k:\ g_k(a) > g_k(b) \end{cases} \Leftrightarrow aPb,$$

$$\forall_j:\ g_j(a) = g_j(b) \quad \Leftrightarrow aIb, \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \exists s:\ g_s(a) > g_s(b) \\ \exists r:\ g_r(a) < g_r(b) \end{cases} \Leftrightarrow aRb,$$

където P, I и R са съответно предпочитание, безразличие и несравнимост.

Ако една алтернатива е по-добра по критерий s , а другата по-добра по критерий r, не е възможно да се реши кой е най-добрият критерии без допълнителна информация. Следователно и двете алтернативи са несравними. Алтернативите, които не са доминирани от никоя друга, се наричат *ефективни решения*. Като се има предвид таблицата за оценка на конкретен многокритериален проблем, повечето алтернативи обикновено са ефективни. Допълнителната информация може да включва:

- компромиси между критериите;
- стойностна функция, обединяваща всички критерии в една

функция за да се получи монокритериален проблем за който съществува оптимално решение;

- тегла, даващи относителното значение на критериите;
- предпочитания, свързани с всяко двойно сравнение във всеки

критерий;

- прагове, определящи пределни предпочитания.

Методите PROMETHEE изискват много ясна допълнителна информация, която лесно се получава и разбира от страна на ЛВР. Целта на всички многокритериални методи е да се обогати графиката на доминиране, т.е. да се намали броят на несравнимостта (R). Когато е изградена полезна функция многокритериалният проблем се свежда до един критериен проблем за който съществува оптимално решение и напълно трансформира структурата на проблема с решението.

Методите PROMETHEE принадлежат към класа на изпреварващите методи.

За да се изгради подходящ многокритериален метод е необходимо да бъдат изпълнени някои изисквния:

- да се вземе предвид амплитудата на отклоненията между оценките

на алтернативите в рамките на всеки критерий:

$$d_j(a, b) = d_j(a) - d_j(b) \qquad (7)$$

Тъй като оценките $d_j(a)$ на всеки критерий са изразени в техните собствени единици, то претеглящите ги ефекти трябва да бъдат напълно елиминирани. Недопустимо е да се получават заключения в зависимост от скалата в която се изразяват оценките.

- в случай на двойни сравнения подходящия многокритериален метод

следва да предоставя следната информация:

a е за предпочитане b;

a и b са безразлични;

a и b са несравними.

Целта е да се намали максимално броят на несъвместимостите.

- различните многокритериални методи изискват различна допълнителна информация и използват различни процедури за изчисление, така че решенията които се предлагат да бъдат различни. Следователно е важно да се разработят методи разбираеми от лицата вземащи решения;

- подходящата процедура не трябва да включва технически

параметри които нямат значение за вземащия решение;

- подходящ метод трябва да предоставя информация за противоречивият характер на критериите;

- повечето от многокритериалните методи придават тежести от относително значение на критериите. Тези тегла отразяват вземането на решение на ЛВР.

Методите PROMETHEE са проектирани за решения на многокритериални проблеми от тип (5) и свързаната с тях таблица за оценка. Състоят се от:

- Информация между критериите

Таблица 2 трябва да бъде попълнена с разбирането, че наборът $\{w_j, j = 1,2, \dots, k\}$ представлява тегла с относително значение на различните критерии. Тези тегла не са отрицателни числа и са независими от мерните единици на критериите.

Таблица 2

Тежести с относително значение

$g_1(.)$	$g_2(.)$	...	$g_j(.)$	...	$g_k(.)$
ω_1	ω_2	...	ω_j	...	ω_k

Колкото по-голямо е теглото, толкова по-важен е критерият. Няма възражение да се вземат предвид нормираните тегла, така че:

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = 1 \quad (8)$$

В PROMETHEE софтуера DECISION LAB се разрешава въвеждането на произволни числа за теглата, което улеснява изразяването на относителната важност на критериите. След това тези числа се делят на тяхната сума, така че теглата да се нормират автоматично.

- Информация в рамките на всеки критерий

PROMETHEE не разпределя присъща абсолютна полезност на всяка алтернатива нито в глобален план нито по всеки критерий. Предпочитаната структура на PROMETHEE се основава на двойни сравнения. В този случай в отклонението между оценките се разглеждат две алтернативи по определен критерий. Колкото по-голямо е отклонението толкова по-голямо е предпочитанието. Счита се, че тези предпочитания са реални числа вариращи между 0 и 1. Това означава, че за всеки критерий വземащият решение има предвид функция:

$$P_j(a,b) = F_j\left[d_j(a,b)\right] \quad \forall a,b \in A \qquad (9)$$

където

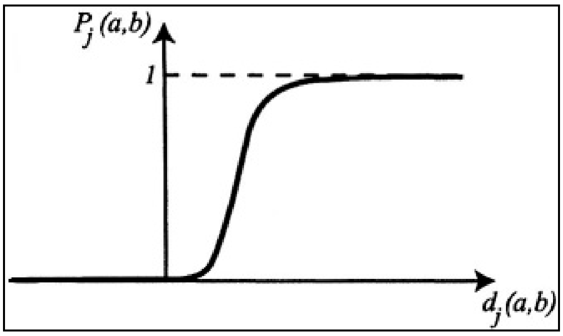
$$d_j(a,b) = g_j(a) - g_j(b) \qquad (10)$$

и за които:

$$0 \leq P_j(a,b) \leq 1 \qquad (11)$$

В случай, че даден критерий е максимален тази функция дава предпочитание на a спрямо b за наблюдавани отклонения между техните оценки по критерия $g_j(\cdot)$. Той трябва да има следната форма показана на фиг.3. Предпочитанията са равни на 0 когато отклоненията са отрицателни. Съдържа следното свойство:

$$P_j(a,b) > 0 \iff P_j(b,a) = 0 \qquad (12)$$



Фиг.3. Предпочитания на функция

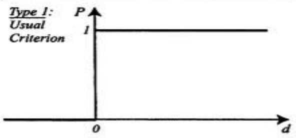
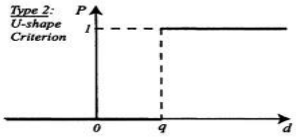
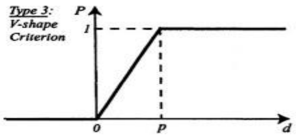
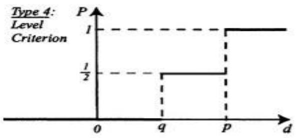
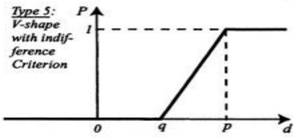
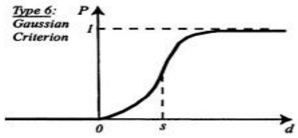
За да бъдат сведени до минимум критериите функцията за предпочитане трябва да се обърне или да се даде от:

$$P_j(a,b) = F_j\left[-d_j(a,b)\right] \qquad (13)$$

Двойката $\{g_j(\cdot), P_j(a,b)\}$ е наречена обобщен критерий свързан към критерий $g_j(\cdot)$. Такъв обобщен критерий трябва да бъде определен за всеки критерий. За да се улесни идентифицирането са предложени шест типа конкретни предпочитани функции, показани в таблица 3.

Таблица 3

Видове функции за предпочитания *P (d)* с параметри

Generalised criterion	Definition	Parameters to fix
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases}$	–
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ 1 & d > q \end{cases}$	q
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ \frac{d}{p} & 0 \leq d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{1}{2} & q < d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p, q
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p, q
	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}} & d > 0 \end{cases}$	s

Винаги трябва да се определят 0, 1 или 2 параметра и значението им да е ясно:

q е праг или безразличие;

p е праг на строго предпочитание;

s е междинна стойност между q и p.

Прагът на безразличие q е най-голямото отклонение което се счита за пренебрежимо от страна на вземащия решение докато прагът за предпочитане p е най-малкото отклонение което се счита за достатъчно да породи пълно предпочитание. Идентифицирането на обобщен критерий след това се ограничава до избора на подходящи параметри.

Софтуерът PROMCALC и DECISION LAB предлага само тези шест форми.

Процедурата PROMETHEE се основава на двойни сравнения. Първо се определят агрегираните индекси за предпочитания и след това изпреварващите потоци.

- Агрегирани индекси за предпочитания

Нека $a, b \in A$ и:

$$\begin{cases} \pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} P_j(a,b)w_j \\ \pi(b,a) = \sum_{j=1}^{k} P_j(b,a)w_j \end{cases} \quad (14)$$

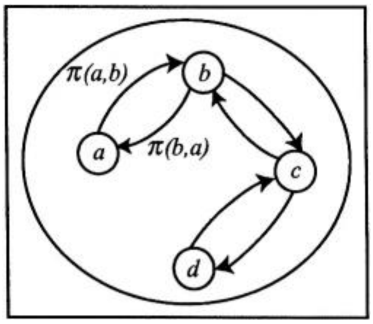
$\pi(a,b)$ изразява степента на предпочитание над всички критерии а $\pi(b,a)$ как b е предпочитано пред a. В повечето случаи има критерии за които a е по-добър от b и критерии за които b е по-добър от a. Следователно $\pi(a,b)$ и $\pi(b,a)$ обикновено са положителни. За всички $a,b \in A$ важат следните свойства:

$$\begin{cases} \pi(a,a) = 0 \\ 0 \leq \pi(a,b) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(b,a) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(a,b) + \pi(b,a) \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

Следователно:

$$\begin{cases} \pi(a,b) \sim 0 \; \textit{предполага слабо глобално предпочитание на а над b} \\ \pi(a,b) \sim 1 \textit{предполага силно глобално предпочитание на а пред b} \end{cases} \quad (16)$$

Щом $\pi(a,b)$ и $\pi(b,a)$ се изчисляват за всяка двойка алтернативи на A се получава пълна стойностна изпреварваща графика включваща две дъги между всяка двойка възли показани на фиг.4.



Фиг.4. Стойностна изпреварваща графика

- Изпреварващи потоци

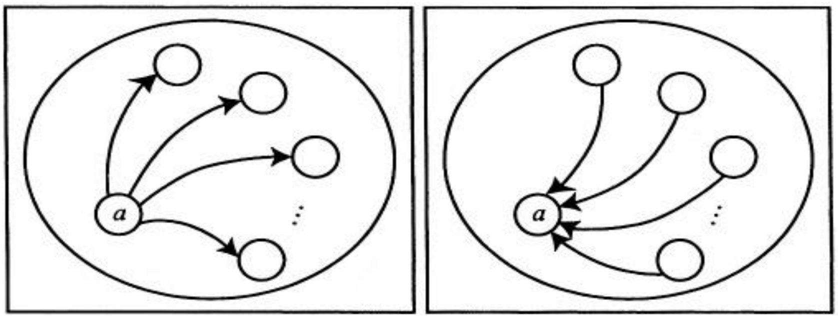
Всяка алтернатива a е изправена пред (n-1) други алтернативи в A. Определят се следващите два изпреварващи потока:

- положителния изпреварващ поток:

$$\phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a,x) \quad (17)$$

- отрицателния изпреварващ поток:

$$\phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x,a) \quad (18)$$



а/ *б/*

Фиг. 5. PROMETHEE изпреварващи потоци (фиг.5а и фиг.5б)

Положителният изпреварващ поток показва как алтернативата *a* изпреварва всички останали. Колкото по-висока $\phi^+(a)$ толкова по-добра е алтернативата (фиг.5а).

Негативният изпреварващ поток показва как алтернативата *a* е изпреварена от всички останали. Колкото е по-ниска $\phi^-(a)$ толкова по-добра е алтернативата (фиг.5б).

Частичното класиране (P^I, I^I, R^I) на PROMETHEE се получава от положителните и отрицателните изпреварващи потоци.

$$\begin{cases} aP^I b \quad ако & \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) < \phi^-(b) \text{ или} \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) < \phi^-(b) \text{ или} \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) = \phi^-(b) \end{cases} \\ aI^I b \quad ако & \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) = \phi^-(b) \\ aR^I b \quad ако & \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) > \phi^-(b) \text{ или} \\ \phi^+(a) < \phi^+(b) \text{ и } \phi^-(a) < \phi^-(b) \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

където P^I, I^I, R^I съответно означават предпочитание, безразличие и несравнимост.

Когато $aP^I b$ се асоциира с по-високата сила на *a* свързана с по-ниската слабост на *b*, информацията за двата изпреварващи потока е последователна и следователно може да се счита за сигурна.

При $aI^I b$, както положителните така и отрицателните потоци са равни.

При $aR^I b$ по-високата сила на едната алтернатива се свързва с по-слабата на другата. В такъв случай информацията предоставена от двата потока не е последователна. Тогава е разумно да се внимава и да се счита, че и двете алтернативи са несъпоставими.

PROMETHEE II се състои от (P^{II}, I^{II}) *пълно класиране*. В случай, че вземащият решение изисква пълно класиране. След това може да се вземе в предвид нетният изпреварващ поток.

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a) \quad (20)$$

Това е балансът между положителните и отрицателните изпреварващи потоци. Колкото по-голям е нетният поток толкова по-добра е алтернативата, така че:

$$\begin{cases} aP^{II} b \quad ако \ \phi(a) > \phi(b) \\ aI^{II} b \quad ако \ \phi(a) = \phi(b) \end{cases} \quad (21)$$

Когато се разглежда ПРОМЕТЕ всички алтернативи са сравними. Не остават несъвместимости но получената информация може да бъде по-спорна тъй като повече информация се губи като се вземе предвид разликата (20). Свойствата са:

$$\begin{cases} -1 \le \phi(a) \le 1 \\ \sum_{x \in A} \phi(a) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Когато $\phi(a) > 0$, a повече изпреварва всички алтернативи по всички критерии. Когато $\phi(a) < 0$, a е по-изпреварен.

Тъй като нетният поток $\phi(\cdot)$ осигурява пълно класиране той може да бъде сравнен с функция на полезност. Едно от предимствата на $\phi(\cdot)$ е, че той е изграден на ясна и проста информация за предпочитания (тегла и функции на предпочитания) и че разчита на сравнителни изявления, а не на абсолютни изявления.

Според определението на положителните и отрицателните изпреварващи потоци (17) и (18) и на агрегираните индекси за предпочитания (14) има:

$$\phi(a) = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in A} [P_j(a,x) - P_j(x,a)]\, w_j \quad (23)$$

Следователно:

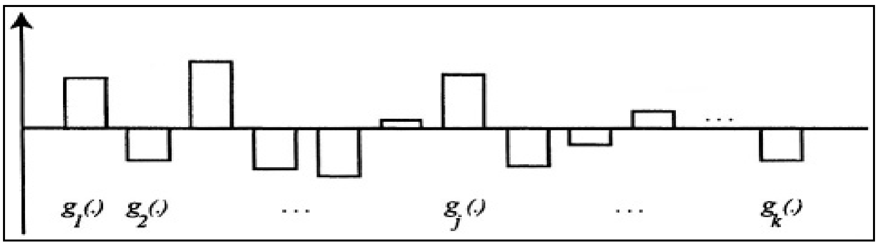
$$\phi(a) = \sum_{j=1}^{k} \phi_j(a) w_j \quad (24)$$

Ако:

$$\phi_j(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} [P_j(a,x) - P_j(x,a)] \quad (25)$$

$\phi_j(a)$ е единичен критерий нетен поток. Той изразява как алтернативата a надминава $(\phi_j(a) > 0)$ или $(\phi_j(a) < 0)$ от всички останали алтернативи на критерия $g_j(\cdot)$.

Профилът на алтернативата се състои от множеството от всички единични критерии нетни потоци: $\phi_j(a), j = 1,2, \dots, k$.



Фиг.6. Профил на алтернативата

Профилите на алтернативите са особено полезни за да се оцени тяхното „качество“ по различните критерии. Той се използва широко от ЛВР за да завършат оценката си.

Според (24) се наблюдава, че глобалният нетен поток на алтернатива е скаларният продукт между вектора на теглата и профилния вектор на тази алтернатива и ще се използва широко при изграждането на визуален интерактивен модул GAIA.

Разглежда се матрицата $M(n \times k)$ на единичните критерий нетните потоци на всички алтернативи, както са дефинирани в (25).

Информацията включена в матрицата M е по-обширна от тази в таблицата за оценка 1, тъй като степените на предпочитания дадени от обобщените критерии се вземат предвид в M. Освен това $g_j(a_i)$ се изразяват в собствена скала докато $\phi_j(a_i)$ са неразмерни. Освен това M не зависи от теглата на критериите.

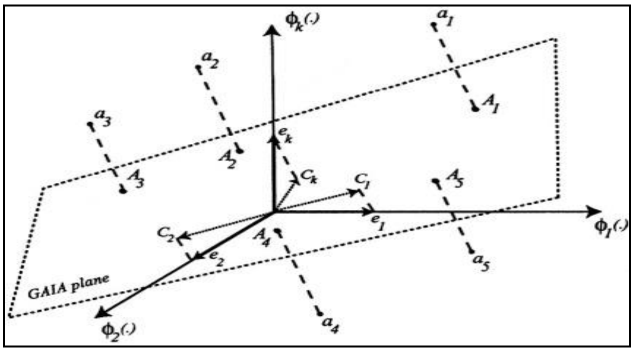
Таблица 4

Матрица *M*

	$\phi_1(.)$	$\phi_2(.)$	$\cdots$	$\phi_j(.)$	$\cdots$	$\phi_k(.)$
a_1	$\phi_1(a_1)$	$\phi_2(a_1)$	$\cdots$	$\phi_j(a_1)$	$\cdots$	$\phi_k(a_1)$
a_2	$\phi_1(a_2)$	$\phi_2(a_2)$	$\cdots$	$\phi_j(a_2)$	$\cdots$	$\phi_k(a_2)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
a_i	$\phi_1(a_i)$	$\phi_2(a_i)$	$\cdots$	$\phi_j(a_i)$	$\cdots$	$\phi_k(a_i)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
a_n	$\phi_1(a_n)$	$\phi_2(a_n)$		$\phi_j(a_n)$		$\phi_k(a_n)$

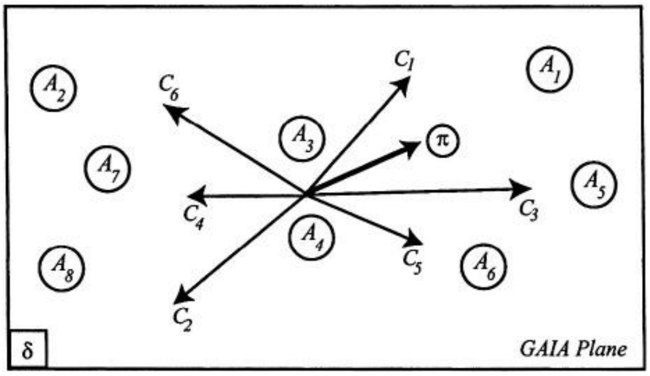
Следователно n алтернативите може да бъдат представени като облак от n точки в k пространство. Според (22) този облак е съсредоточен в началото. Тъй като броят на критериите обикновено е по-голям от два и е невъзможно да се получи ясна представа за относителното положение на точките по отношение на критериите се проектира информацията включена в k-измерението в равнина. Проектират се не само точките представящи алтернативите но и единичните вектори на координатните оси представящи критериите и се получава GAIA равнината, показана на фигура 7.

GAIA е равнината за която се запазва възможно най-много информация след проекцията. Съгласно техниката за анализ на основните компоненти тя се определя от двата собствени вектора съответстващи на двете най-големи собствени стойности на ковариационната матрица $M^I M$ на единичните критерийни нетни потоци.



Фиг.7. Проекция на GAIA равнина

Ако $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots A_n)$ са проекциите на n точки представляващи алтернативите и $(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots C_k)$ са проекциите на k единичните вектори на координатните оси IR_k представляващи критериите се получава равнина на GAIA от следния тип:



Фиг.8. Алтернативи и критерии в равнината GAIA

Тогава са запазени следните свойства:

Р1: Колкото по-дълга е критерийната ос в равнината на GAIA толкова по-дискриминационнен е този критерий;

Р2: Критериите изразяващи подобни предпочитания са представени с оси ориентирани в приблизително същата посока;

Р3: Критериите изразяващи конфликтни предпочитания са ориентирани в обратни посоки;

Р4: Критерии които не са свързани помежду си по отношение на предпочитанията са представени с ортогонални оси;

Р5: Подобни алтернативи са представени от точки разположени близо една до друга;

Р6: Представени са алтернативи които са добри по определен критерий по точки и са разположени по посоката на съответната критерийна ос.

От примера във фигура 8 се наблюдава:

- критериите $g_1(\cdot)$ и $g_3(\cdot)$ изразяват подобни предпочитания а алтернативите a_1 и a_5 са доста добри по тези критерии;

- критериите $g_6(\cdot)$ и $g_4(\cdot)$ също изразяват подобни предпочитания а алтернативите a_2,a_7 и a_8 са доста добри за тях;

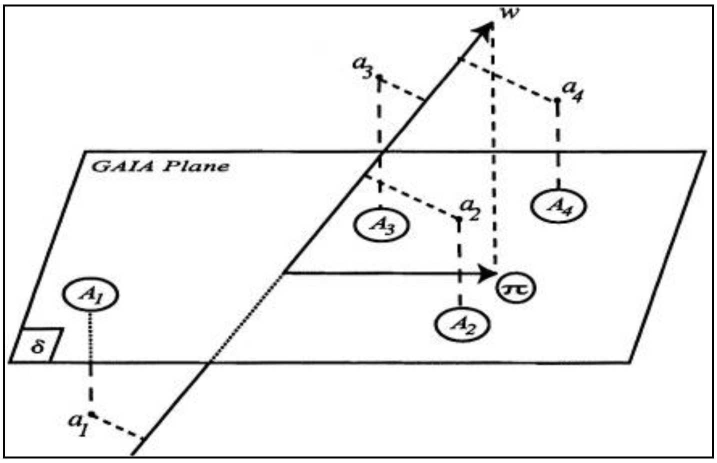
- критериите $g_2(\cdot)$ и $g_5(\cdot)$ са по-скоро независими;
- критериите $g_1(\cdot)$ и $g_3(\cdot)$ силно противоречат на критериите $g_4(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$;
- алтернативите a_1, a_5 и a_6 са доста добри по критериите $g_1(\cdot), g_3(\cdot)$ и $g_5(\cdot)$;
- алтернативите a_2,a_7 и a_8 са доста добри по критериите $g_6(\cdot), g_4(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$;
- алтернативите a_3 и a_4 никога не са добри и никога не са по-лоши от всички критерии.

Въпреки че равнината на GAIA включва само процент δ от общата информация тя предоставя мощен инструмент за графична визуализация за анализ на многокритериален проблем.

Представено е въздействието на теглата в равнината на GAIA. Векторът на тежестите също е вектор на IR^k. Според (5.20) нетният поток на алтернатива a_i е скаларен продукт между вектора на неговите единични критерий нетни потоци и вектора на теглата:

$$a_i : \left(\phi_1(a_i), \phi_2(a_i), \dots, \phi_j(a_i), \dots, \phi_k(a_i)\right)$$
$$w: \left(w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_k\right) \quad (26)$$

Това означава, че нетният поток *a* на PROMETHEE е проекция на вектора на неговите единични критерий нетни потоци на вектор *w*. Следователно относителните позиции на проекциите на всички алтернативи на *w* осигуряват класирането PROMETHEE.



Фиг.9. PROMETHEE класиране. PROMETHEE ос и решение

Очевидно векторът *w* играе решаваща роля, която може да бъде представена в равнината на GAIA чрез проекцията на единичния вектор на теглата. Нека π е тази проекция и да наречем π оста на PROMETHEE. В примера на фигура 9 класирането PROMETHEE е $a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$.

Ако всички тегла са концентрирани върху един критерий тогава оста на решението PROMETHEE ще съвпада с оста на този критерий в равнината на GAIA. И двете оси са проекция на вектор на координатна единица на IR^k.Когато теглата са разпределени по всички критерии, оста на PROMETHEE се появява като претеглен резултат от всички критерии на оси $\left(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots C_k\right)$.

Ако π е дълъга тогава оста на PROMETHEE има силна мощ за вземане на решение и ЛВР може да избере алтернативи в неговата посока.

Ако π е къса тогава оста на PROMETHEE няма тази силна мощ за вземане на решение. Според тежестите това означава, че критериите са силно противоречиви и че изборът на добър компромис е проблем.

Когато теглата са изменени, тогава позициите на алтернативите и критериите остават непроменени в равнината на GAIA.

Процесът се показва графично и резултатите са лесни за оценка.

Очевидно е, че разпределението на теглата играе важна роля при всички многокритериални проблеми. Веднага след като теглата са фиксирани ПРОМЕТЕ предлага окончателно класиране.

PROMETHEE е подходящ при избор на една алтернатива. Въпреки това в някои приложения трябва да се идентифицират подмножества от алтернативи като се има предвид набора от ограничения.

Нека $\{a_i, i = 1,2, \ldots, n\}$ е набор от възможни алтернативи и свързани със следните булеви променливи към тях:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ ако } a_i \text{ е избран} \\ 0 \text{ ако } a_i \text{ не е избран} \end{cases} \quad (27)$$

Има следните две стъпки:

Стъпка 1: Проблемът с многокритериите първо се разглежда без ограничения. Получава се класиране за което нетните потоци $\{\phi(a_i), i = 1,2, \ldots, n\}$ са изчислени.

Стъпка 2: Следващата линейна програма {0,1} се разглежда и след това се вземат предвид допълнителните ограничения.

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k} \phi(a_i)x_i\right\} \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_\rho, i x_i \sim \beta_\rho \quad \rho = 1,2, \ldots, P \quad (29)$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2, \ldots, n \quad (30)$$

където, символът „~" важи за равно, по-малко или по-голямо. Коефициентите на целевата функция (28) са нетните изпреварващи потоци. Колкото по-голям е нетният поток толкова по-добра е алтернативата. Целта на линейната програма {0,1} е да избере алтернативи които събират възможно най-много нетен поток и да вземат предвид ограниченията.

Ограниченията (29) могат да включват бюджет, възвръщаемост, инвестиции, маркетинг, ограничения и други. Те могат да бъдат свързани с всички алтернативи.

След решаването на линейната програма се получава подмножество от алтернативи удовлетворяващи ограниченията и осигуряващи възможно най-много нетен поток. Могат да се използват класически процедури за линейно програмиране 0-1.

DECISION LAB е актуалната софтуерна реализация на методите PROMETHEE и GAIA. DECISION LAB е приложение за Windows, което използва типичен интерфейс за електронни таблици за да управлява данните от многокритериален проблем.

Всички данни свързани с методите PROMETHEE (оценки, функции на предпочитания и тегла) могат лесно да бъдат дефинирани и въведени от потребителя. Категории алтернативи или критерии също могат да бъдат определени за по-добро идентифициране на подгрупи от свързани елементи и за улесняване на анализа на проблема с решението.

Приложение на PROMETHEE метод

Множеството от критерии и ограничения изисква прилагане на многокритерианите методи при вземане на решения. Предвид ограничения набор от алтернативи, вземането на решения се състои в класирането на всяка алтернатива - от най-добрите до най-лошите.

Целта е определяне само на тежестите (праговете се фиксират) водещо до решаване на линейна програма.

Методът PROMETHEE е основан на изпреварваща връзка между двойките на алтернативата. Методът на изпреварване сравнява двойките алтернативи по всеки критерий и описва разликата в предпочитанията между двойките алтернативи на всеки критерий. По този начин функциите на предпочитания за числовата разлика между двойките алтернативи са изградени за да опишат преференцията на предпочитанията от гледна точка на вземащия решение. Стойността на тези функции варира от 0 до 1. Колкото по-голяма е стойността на функцията, толкова разликата в предпочитанията става по-голяма. Когато стойността е нула, няма преференциална разлика между двойката алтернативи. Когато стойността е единица тогава една от алтернативите надвишава другата.

Нека $A_1, A_2, \dots, A_m$ са m алтернативи и $g_1, g_2, \dots, g_n$ са n кардинални критерии и y_{ij} е критерийна стойност на i-та алтернатива A_i по отношение на j-ия критерий g_j. Приема се, че всички критерии трябва да бъдат сведени за максимални.

Използва се $p_j\,(A_i, A_k)$ за обозначаване на функцията за предпочитане по критерий g_j.

$$P_j(A_i, A_k) = \begin{cases} 0 & y_{ij} \le y_{kj} \\ P(y_{ij} - y_{kj}) & y_{ij} > y_{kj} \end{cases} \quad (31)$$

Въведени са шестте функции базирани на различен критерий: истински критерий; квазикритерий; критерий с линейно предпочитание; критерий на ниво; критерий с линейно предпочитание и зона на безразличие и критерий на Гаус.

Обобщения критерий представлява различна височина спрямо структурата на предпочитанията и интензитета на предпочитание.

Критерият с линейно предпочитание и зона на безразличие се използва най-вече от потребителя, следван от критерий Гаус за практическо приложение. И в двата критерия интензивността на предпочитанията се променя постепенно от 0 до 1, докато при останалите критерии има резки промени в интензивността на предпочитанията.

Използва се критерий с линейно предпочитание и зона на безразличие. Функцията за предпочитане се дефинира, както следва:

$$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & d_j \le s_j \\ [|d_j| - s_j/(r_j - s_j)] & s_j < d_j \le r_j \\ 1 & d_j > r_j \end{cases} \quad (32)$$

Където $d_j = y_{ij} - y_{kj}$ обозначава разликата в предпочитанията между двойка алтернативи по критерии g_j, а r_j и s_j са праг на предпочитание и безразличие.

Използвайки функцията за предпочитане може да се получи степента на предпочитание за всяка двойка алтернативи по всеки критерий. За да се получи общата степен на предпочитание $S(A_i, A_k)$, степента на предпочитание за всеки критерий трябва да бъде обобщена по формулата:

$$S(A_i, A_k) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \omega_{\mathrm{j}} \mathrm{P}_{\mathrm{j}}(A_i, A_k) \quad (33)$$

Където ω_j представлява теглото на критерия g_j.

За да се класират алтернативите от най-добрия до най-лошия, изходящият и входящият поток за всяка алтернатива се определя, както следва:

- изходящият поток от алтернатива A_i се дефинира като:

$$\phi^{+}(\mathrm{A_i}) = \sum_{\mathrm{A_K \in A}} S(A_i, A_k) \quad (34)$$

- входящият поток от алтернатива A_i се определя като:

$$\phi^{-}(\mathrm{A_i}) = \sum_{\mathrm{A_K \in A}} S(A_i, A_k) \quad (35)$$

Въз основа на изходящия и входящия поток, нетният поток $\phi(A_i)$ се определя от (36) за да представи общата степен на предпочитание на алтернатива A_i и A_j.

$$\phi(A_i) = \phi^{+}(\mathrm{A_i}) - \phi^{-}(\mathrm{A_i}) \quad (36)$$

Алтернативите могат да бъдат класирани от най-добрия до най-лошия по нетния поток. Ако $\phi(A_i) = \phi(A_j)$, алтернативата A_i е безразлична към A_j. Ако $\phi(A_i) > \phi(A_j)$, алтернативата A_i е за предпочитане пред A_j.

Определяне тежестите на критериите

Хипотезата е, че предпочитанието и праговете на безразличие са известни, но теглата на критериите са неизвестни. Вземащият решение може да даде предпочитание на някои алтернативи. Приема се, че предпочитаните отношения на част от алтернативите $A^T = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A(k < m)$ са известни. За всяка двойка на алтернативата a_i, a_k в A^T се прилага едно от двете отношения $a_i S a_k$, $a_k S a_i \cdot a_i S a_k$, т.е. ЛВР предпочита алтернатива a_i.

За да се изведе тежестта на критериите се съставя следната линейна програма (37-40).

$$\max \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} e_{ij} \quad (37)$$

$S(A_i, A_j) - e_{ij} \leq S(A_i, A_j)$ за всички двойки алтернативи в A^t се удовлетворява връзката на $A_i S A_j$ (38)

$S(A_i, A_j) + e_{ij} \leq S(A_i, A_j)$ за всички двойки алтернативи в A^t се удовлетворява връзката на $A_j S A_i$ (39)

$$e_{ij} \geq 0 \quad (40)$$

Чрез линейното програмиране се установява, че има $k(k-1)/2$ положителни променливи за решение. Целевата функция е линейна функция за неизвестните тегла. С теглото решено от линейно програмиране може да се изчисли нетния поток на алтернативите и да се извърши класиране на алтернативите от най-добрите до най-лошите.

Имайки седем алтернативи и пет критерии за преценка в таблица 5 са дадени оценките на алтернативите относно критериите за преценка.

Таблица 5

Оценка на алтернативите за всеки критерии

	Критерии 1	Критерии 2	Критерии 3	Критерии 4	Критерии 5
Алтернатива 1	30	6	5	3.5	18
Алтернатива 2	70	3	8	4.5	24
Алтернатива 3	50	1	4	5.5	15
Алтернатива 4	100	4	6	8.0	20
Алтернатива 5	60	2	8	7.5	16
Алтернатива 6	80	5	5	4.0	21
Алтернатива 7	45	4	7	6.5	19

В следващата таблица 6 е показн прагът на предпочитание и безразличие.

Таблица 6

Праг на предпочитание и безразличие

	Критерии 1	Критерии 2	Критерии 3	Критерии 4	Критерии 5
q	15	1	1	1.5	3
p	25	2	2	2.5	6

Лицето вземащо решение дава предпочитание на алтернативите $a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$.

Теглата на критериите могат да бъдат получени чрез използване линейно програмиране и са получени следните стойности: $\omega_1 = 0.316$, $\omega_2 = 0.302$, $\omega_3 = 0.128$, $\omega_4 = 0.142$ и $\omega_5 = 0.112$.

Нетният поток на алтернативата може да бъде индуциран.

Таблица 7

Нетен поток на алтернативите

Алтернативи	1	2	3	4	5	6	7
Нетен поток	0.51	0.547	0.432	0.713	0.467	0.685	0.601

По този начин се установява предпочитанието на алтернативите $a_4 \succ a_6 \succ a_7 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_3$.

Определяне на тежестите е първият етап. След което могат да се прилагат и следващите методи - PROMETHEE II, PROMETHEE III, PROMETHEE IV и т.н.

References:

1. Brans, J.P., Mareschal, B., Promethee-V – MCDM problems with segmentation constraints, *INFOR*, 30(2):85–96, 1992.

2. Brans, J.P., Mareschal, B., The Promcalc and Gaia decision-support system for multicriteria decision aid, *Decision Support Systems*, 12(4-5):297–310, 1994.
3. Brans, J.P., Mareschal, B., Vincke, Ph., PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis, *Operational Research '84,* p. 477-490. North-Holland, Amsterdam, 1984.
4. Brans, J.P., Mareschal, B., The PROMETHEE-GAIA decision support system for multicriteria investigations, *Investigation Operativa*, 4(2):107-117, 1994.
5. Brans, J.P., Vincke, P., A preference ranking organisation method: The PROMETHEE method for MCDM, *Management Science,* 31(6):647-656, 1985.
6. Davignon, G., Mareschal, B., Specialization of hospital services in Quebec-An application of the PROMETHEE and GAIA methods, *Mathematical and Computer Modelling*, 12(10-11):1393–1400, 1989.
7. Roy, B, Multicriteria Methodology for Decision Aiding, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
8. Lagreze, J., Preference disaggregation: Twenty years of MCDA
9. Experience, European Journal of Operational Research, 130 (2): 233-245, 2001.
10. Zeshui, Xu., Linguistic Decision Making: Theory and Methods, Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology Nanjing, ISBN 978-7-03-033105-2, 2012.